

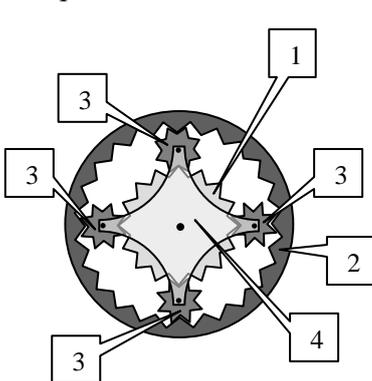
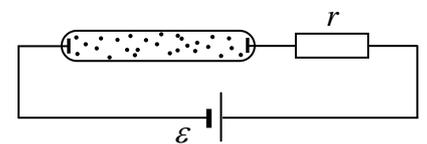
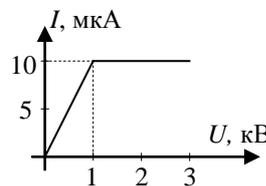
1. Светофор создает автомобильную «пробку». При включении красного и зеленого сигнала на одинаковое время (время горения желтого – мало) средняя (за несколько периодов включения-выключения светофора) скорость перемещения машин в «пробке» составила $v = 1$ м/с. При этом скорость движения каждой машины (когда она ехала) составляла $u = 6$ м/с. В чем причина отличия средней скорости перемещения машин в «пробке» от половины скорости их движения? Во сколько раз вырастет средняя скорость машины в «пробке» при увеличении скорости их движения в 2 раза? Считать, что поток машин «не перемешивается», все водители – дисциплинированы, и трогаются, когда стоящая впереди машина уже поехала; машины либо движутся со скоростью u (или $2u$ во втором случае), либо стоят.

2. Температура на улице $t_0 = -20^\circ\text{C}$. Если в доме с кирпичными стенами включить нагреватель, через некоторое время в доме устанавливается температура $t_1 = 1^\circ\text{C}$. Какой будет температура в доме, если внешнюю поверхность стен обложить теплоизолирующим материалом, толщина которого в 15 раз меньше толщины кирпича, а коэффициент теплопроводности в 10 раз меньше коэффициента теплопроводности кирпича? Мощность нагревателя и температура на улице не менялись. Где выгоднее располагать теплоизолятор для лучшего сохранения тепла – внутри или снаружи дома и почему? Считать, что потери тепла происходят только через стены. Указание. Количество тепла q , переносимого в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx , одна поверхность которого поддерживается при температуре t_1 , вторая – при температуре t_2 , определяется законом: $q = \lambda(t_2 - t_1)/\Delta x$, где λ - коэффициент теплопроводности (закон Фурье).

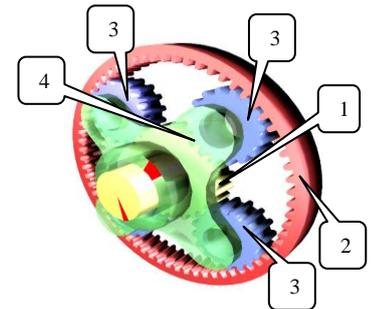
3. Балка массы m имеет длину l и толщину $h = l/8$. Левый нижний угол балки соединен с вертикальной стеной шарниром, верхний левый угол прикреплен к стене горизонтальным тросом. Определить силу давления балки на шарнир.



4. Вольтамперная характеристика газового разряда дана на графике. Газовую трубку с последовательно соединенным сопротивлением $r = 3 \cdot 10^8$ Ом подключают к источнику постоянной ЭДС $\varepsilon = 6$ кВ. Найти напряжение на трубке. Сопротивлением источника пренебречь.



5. Планетарная передача (см. рисунок и схему) состоит из центральной (солнечной) шестерни (1 на рисунке), внешней (коронной) шестерни (2) и трех-четырёх шестерен-спутников (3), которые соединены друг с другом с помощью водила (4) и могут вращаться вокруг своей оси каждая и все вместе вокруг солнечной шестерни, вращая водило. Такая передача позволяет передавать мощность от солнечной шестерни на коронную и водило в разных пропорциях. Передачи такого типа используются в дифференциалах автомобилей или автоматических коробках передач.



Пусть радиус солнечной шестерни – R , внутренний радиус коронной шестерни - $2R$, угловая скорость солнечной шестерни ω , коронной - 4ω , коронная и солнечная шестерни вращаются в одном направлении. Найти угловые скорости вращения шестерен-спутников вокруг своих осей и угловую скорость водила. Какой будет угловая скорость водила, если угловая скорость солнечной шестерни ω , а коронная шестерня заблокирована? Какой будет угловая скорость коронной шестерни, если угловая скорость солнечной шестерни ω , а водило заблокировано?

6. Плавкий предохранитель представляет собой кусочек проволоки, который плавится, если сила тока через него превышает значение $I = 1$ А. Оценить, при каком токе перегорит предохранитель, изготовленный из проволоки того же материала, но с втрое большей длиной, и вчетверо большим диаметром. Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур проволоки и окружающей среды и площади поверхности проволоки.

Ответы и решения

1. Отличие скорости перемещения машин в «пробке» от $u/2$ (или от u , когда скорость машин увеличилась вдвое) связано с тем, что машины трогаются не одновременно. Каждая машина начинает движение после того как машина впереди уже поехала, т.е. с некоторой задержкой по времени по сравнению с предыдущей машиной. Это время задержки связано со многими причинами: реакция водителя, время включения коробки переключения передач и т.д. Конечно, для каждого водителя и для каждой машины эта величина индивидуальная, но для расчета средней скорости перемещения машин через перекресток можно взять среднее значение этой величины и считать, что после того как включается зеленый сигнал светофора по «пробке» с определенной скоростью идет «волна трогания» машин. Пусть скорость этой волны c (это значит, что машина, расположенная на расстоянии x от светофора, тронется через время x/c после включения зеленого сигнала), время горения зеленого сигнала светофора Δt . Тогда за это время мимо светофора успеет проехать участок «пробки» с такой длиной Δl , что «волна трогания» за время Δt успеет дойти до его конца, а машина, находящаяся в его конце, успеет доехать до светофора

$$\frac{\Delta l}{c} + \frac{\Delta l}{u} = \Delta t$$

где u скорость машины. Отсюда находим, что средняя скорость машин в «пробке» равна

$$v = \frac{\Delta l}{2\Delta t} = \frac{cu}{2(c+u)} \quad (1)$$

Из (1) находим

$$c = \frac{2uv}{u-2v} \quad (2)$$

Если скорость машин увеличивается вдвое, то средняя скорость машин в «пробке» можно найти по формуле (1) с заменой $u \rightarrow 2u$

$$v' = \frac{2cu}{2(c+2u)} \quad (3)$$

Подставляя в формулу (3) скорость «волны трогания» (2), получим

$$v' = \frac{uv}{u-v} = 1,2 \text{ м/с.}$$

Это значит, что увеличение скорости машин в 2 раза увеличивает пропускную способность перекрестка всего на 20 %.

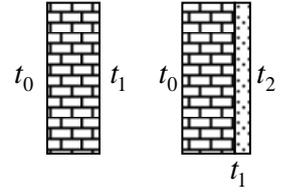
2. Пусть мощность нагревателя равна P . В установившемся режиме все тепло, выделенное нагревателем, должно уходить через стены. Поэтому

¹ Здесь содержится очевидный частный случай – если $c = \infty$ (машины трогаются одновременно), $v = u/2$ из-за того, что машины едут половину времени – время горения зеленого сигнала равно времени горения красного.

$$P = \frac{\lambda(t_1 - t_0)S}{\Delta l}$$

где λ - коэффициент теплопроводности кирпича, Δl - толщина кирпичной стены, S - площадь стен.

После установки теплоизолирующего материала поток тепла через стены останется неизменным, если пренебречь изменением площади теплопередающей поверхности; не изменилась и температура на улице. Поэтому температура внутренней поверхности кирпичной стены не изменилась. Пусть температура в доме после установки теплоизолирующего материала стала равна t_2 . Тогда поток тепла через теплоизолирующий материал, с одной стороны, определяется законом Фурье



$$\frac{(\lambda/10)(t_2 - t_1)S}{(\Delta l/15)}$$

С другой стороны, этот поток равен потоку через кирпичную стену. Поэтому

$$\frac{\lambda(t_1 - t_0)S}{\Delta l} = \frac{(\lambda/10)(t_2 - t_1)S}{(\Delta l/15)}$$

Отсюда

$$t_2 = t_1 + \frac{2}{3}(t_1 - t_0) = 15^\circ \text{ C}$$

Где располагать теплоизолятор – внутри или снаружи - с точки зрения теплоизоляции совершенно не важно, если пренебречь изменением площади теплопередающей поверхности теплоизолятора. Температура в доме будет такой же. Действительно, в установившемся режиме поток тепла, который определяется разностью температур двух поверхностей стены и теплоизоляции и площадями их поверхностей, равен мощности внутреннего источника. Поэтому разности температур двух поверхностей стены и теплоизоляции не зависят от расположения теплоизоляции – внутри или снаружи дома. Поэтому и разность температур – «улица-дом» не зависит от порядка расположения теплоизолятора.

3. Из условия моментов относительно шарнира, находим

$$mg \frac{l}{2} = Th$$

где T - сила натяжения троса. Отсюда находим

$$T = \frac{mgl}{2h} = 4mg$$

Сила, действующая на балку со стороны шарнира должна компенсировать равнодействующую сил тяжести mg и силы $T = 4mg$. Поэтому суммарная сила, действующая на балку со стороны шарнира (и на шарнир со стороны балки), равна

$$N = \sqrt{17}mg$$

4. Определим сначала, на каком участке вольтамперной характеристики работает трубка. Если бы она содержала только линейный участок (без насыщения), то трубка обладала бы сопротивлением, которое можно найти из графика

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1 \text{ (кВ)}}{10 \text{ (мкА)}} = 10^8 \text{ Ом.}$$

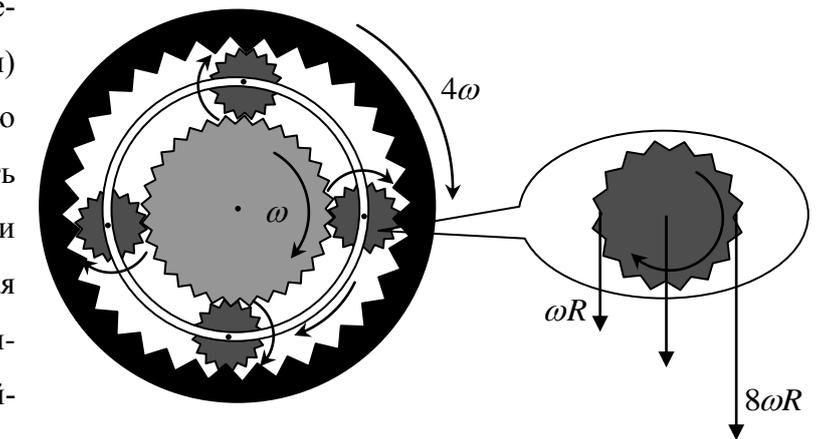
При таком сопротивлении ток в цепи определялся бы законом Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{6 \cdot 10^3 \text{ (В)}}{4 \cdot 10^8 \text{ (Ом)}} = 15 \text{ мкА}$$

Это значение больше тока насыщения через трубку, и, следовательно, ток в цепи будет равен току насыщения $I_0 = 10 \text{ мкА}$. В этом случае напряжение на балластном резисторе будет равно $I_0 r = 3 \cdot 10^3 \text{ В}$. Поэтому напряжение на трубке будет равно $U = \varepsilon - I_0 r = 3 \cdot 10^3 \text{ В}$. Итак, токе через трубку равен $I_0 = 10 \text{ мкА}$, напряжение на трубке - $U = 3 \cdot 10^3 \text{ В}$.

5. Планетарная передача работает таким образом, что вращение с центральной (солнечной) шестерни передается одновременно водилу и коронной шестерне, причем кинематическое распределение вращения между ними не определяется (недостаточно кинематических связей). Это позволяет в зависимости от момента торможения коронной шестерни и водила передавать им разное вращение. Такая передача вращения происходит в дифференциалах автомобилей (особый шарнир, дающий определенную «автономию» колесам автомобиля) и в автоматических коробках передач.

Рассмотрим работу планетарной передачи. Пусть центральная (солнечная) шестерня вращается с угловой скоростью ω , а ее радиус R . Тогда линейная скорость точек на поверхности солнечной шестерни равна ωR , и такой же является линейная скорость точек на поверхности шестерен-спутников, касающихся солнечной. Линейная скорость точек на внешней стороне шестерен-спутников равна линейной скорости точек на внутренней поверхности коронной шестерни, т.е. $8\omega R$. Найдем скорость центра шестерни. В системе отсчета, связанной с ее центром, эти точки имеют одинаковые по величине и противоположно направленные скорости. Пусть эти скорости равны v_0 , а скорость центра солнечной шестерни - v_1 . Тогда по закону сложения скоростей имеем



Складывая и вычитая эти уравнения, найдем линейную скорость центра спутниковой шестерни и скорость вращения точек ее поверхности в системе отсчета, связанной с центром шестерни

$$\begin{aligned} \omega R &= v_1 - v_0 \\ 8\omega R &= v_1 + v_0 \end{aligned} \quad (*)$$

Складывая и вычитая эти уравнения, найдем линейную скорость центра спутниковой шестерни и скорость вращения точек ее поверхности в системе отсчета, связанной с центром шестерни

$$v_1 = 4,5\omega R, \quad v_0 = 3,5\omega R$$

А поскольку радиус спутниковых шестерен - R , их центры находятся на расстоянии $1,5R$ от центра водила, то угловые скорости спутниковых шестерен и водила равны

$$\omega_{\text{снум}} = \frac{3,5\omega R}{R} = 3,5\omega, \quad \omega_{\text{вод}} = \frac{4,5\omega R}{1,5R} = 3\omega$$

Если коронная шестерня заблокирована, то точки на поверхности шестерен-спутников имеют скорости ωR и 0, и из системы уравнений, аналогичной (*)

$$\omega R = v_1 - v_0$$

$$0 = v_1 + v_0$$

находим

$$\omega_{\text{снум}} = -\frac{0,5\omega R}{R} = -0,5\omega, \quad \omega_{\text{вод}} = \frac{0,5\omega R}{1,5R} = 0,33\omega$$

(знак минус означает, что шестерни-спутники вращаются в противоположную сторону – против часовой стрелки). Если заблокировано водило, то спутниковые шестерни только вращаются, и, следовательно, точки на их поверхности имеют линейные скорости, равные ωR . Поэтому и внутренние точки коронной шестерни имеют такую же линейную скорость, а поскольку они находятся на расстоянии $2R$ от ее центра, то коронная шестерня в этом случае вращается в противоположную сторону с угловой скоростью $\omega/2$.

6. При протекании тока в предохранителе выделяется джоулево тепло и он нагревается. Одновременно идет процесс теплопотерь, поэтому если ток в предохранителе меньше 1 А, он не разогревается до температуры плавления. Поскольку потери тепла каким-то телом пропорциональны площади поверхности тела и разности температур тела и окружающей среды, то для тока $I_0 = 1$ А предохранитель нагревается до температуры плавления, и при этой температуре потери тепла равны джоулеву теплу, выделяющемуся в предохранителе

$$I_0^2 \frac{\rho l}{\pi r^2} = \lambda 2\pi r l (T_{\text{пл}} - T_{\text{окр}})$$

где ρ - удельное сопротивление материала предохранителя, l и r - его длина и радиус сечения, $T_{\text{пл}}$ и $T_{\text{окр}}$ - температуры предохранителя и окружающей среды. Отсюда находим

$$\lambda (T_{\text{пл}} - T_{\text{окр}}) = \frac{I_0^2 \rho}{2\pi^2 r^3} \quad (*)$$

Из формулы (*) видно, что если увеличить радиус сечения проводника (при том же токе), то из-за большей теплоотдачи (больше площадь поверхности) и уменьшения тепловыделения (меньше сопротивление) его температура станет меньше температуры плавления, и он не расплавится. Поэтому для плавления нужно увеличить ток в предохранителе. Если радиус сечения (или диаметр) увеличивается в 4 раза, знаменатель формулы (*) увеличится в 64 раза, значит, и числитель нужно увеличить в 64 раза. Т.е. ток нужно увеличить в $\sqrt{64} = 8$ раз. Это значит, что такой предохранитель расплавится при токе 8 А. Как видно из (*) от длины предохранителя его температура не зависит (при условии, что его сопротивление мало по сравнению с другими сопротивлениями цепи и его изменение не меняет ток в цепи).